$\sup \frac{\|\ell(w)\|}{\|x\|}$

# Polynômes et ensembles de Julia

10 octobre 2016

## 1 Applications polynomiales planes

Dans cette première partie, $P$ désigne un polynôme complexe de degré $d \geq 1$.

### 1.1 Théorème de d'Alembert-Gauss

a) Montrer que $|P(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$. En déduire que $|P|$ atteint son minimum absolu en un point $a \in \mathbf{C}$.
b) On suppose que $P(a)$ est non nul et l'on écrit

$$P(a + re^{i\theta}) = a_0(1 + \sum_{k=l}^{d} b_k r^k e^{ik\theta})$$

avec $b_l \neq 0$. Choisir $\theta$ de sorte que $b_l e^{il\theta} = -|b_l|$ et montrer que, pour $r > 0$ assez petit, $|P(a + re^{i\theta})| < |P(a)|$.
c) Montrer que $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

### 1.2

a) Soit $K$ une partie compacte de $\mathbf{C}$. Montrer que la pré-image de $K$ par $P$ est compacte.
b) Soit $F$ une partie fermée du plan ; montrer que $P(F)$ est fermée.

### 1.3 Ouverture

redo: same proofs

a) On suppose que $P(0) = 0$ et qu'il existe $r > 0$ tel que $P(B(0,r))$ ne soit pas un voisinage de 0. Construire $\lambda \in \mathbf{C}^*$ des suites complexes $(z_n)$ et $(a_{nk})_{n \in \mathbf{N}}$, $k = 1, \ldots, d$ telles que, pour tout $n$, $P(X) - z_n = \lambda \prod_{k=1}^{d}(X - a_{k,n})$, $z_n$ tend vers 0 et $|a_{k,n}| \geq r$. Montrer que, quitte à extraire, on peut supposer

que toutes les suites $n \to a_{k,n}$ convergent et aboutir à une contradiction.
b) Montrer que $P$ est une application ouverte. $\Rightarrow P(z+3) - P(0)$

## 1.4 Principe du maximum

Soit $K$ un compact non vide du plan complexe. Montrer que $|P|$ ne peut atteindre son maximum sur $K$ en un point intérieur à $K$. On suggère deux méthodes :
a) Utiliser la question précédente.
b) Choisir un point $a \in K$ en lequel $|P|$ atteint son maximum ; écrire

$$P(a + re^{i\theta}) = b_0 + \sum_{k=1}^{d} b_k r^k e^{ik\theta}$$

et vérifier que $\int_0^{2\pi} |P(a+re^{i\theta})|^2 = 2\pi \sum_{k=0}^{d} |b_k|^2 r^{2k}$ pour aboutir à une contradiction.

# 2 Ensembles de Julia

Soit $P$ un polynôme complexe de degré $d \geq 1$ ; à un nombre complexe $z$, il est associé la suite $z_n$ définie par $z_0 = z$ et $z_{n+1} = P(z_n)$, notée $P^{on}(z)$.

a) Etudier $z_n$ lorsque $P$ est de degré 1.

On suppose désormais $P$ de degré $\geq 2$. Soit $K$ l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $z_n$ est bornée.

b) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout nombre complexe $z$ de module $> R$, $|P(z)| > 2|z|$ et en déduire que $K$ est borné.
c) Soit $a \notin K$. Montrer qu'il existe $N$ tel que $|P^{oN}(a)| > R$ et en déduire que $K$ est fermé.
d) Soit $\Omega$ un ouvert non vide borné de $\mathbf{C}$, de frontière $F$ (qui et elle aussi non vide, pourquoi ?). Prouver que $\sup_{z\in\Omega} |P| = \sup_{z\in F} |P|$ .

e) Démontrer aussi que le complémentaire d'un compact du plan complexe possède une composante connexe non bornée et une seule.

f) Prouver que le complémentaire de $K$ est connexe.